流体地球科学 第8回

東京大学 大気海洋研究所 准教授
藤尾伸三
http://ovd.aori.u-tokyo.ac.jp/fujio/2015chiba/
fujio@aori.u-tokyo.ac.jp

2015/12/4

最終更新日 2015/12/1

前回のポイント

傾度風: コリオリ力＋遠心力＋圧力傾度力のバランス

- 地衡風的 / 旋衡風的 … 慣性周期 $(2\pi/f)$ と, 一周に要する時間を比べる
- 大規模な大気や海洋の運動は動きが遅いので, ほぼ地衡風 (地衡流)

運動を止める力が働く場合 → 初期の運動は減衰

- 地衡風は等圧線から圧力傾度力の向きに傾く→ 高気圧・低気圧を弱める
- 北半球: 高気圧から時計回りに吹き出る. 低気圧に反時計回り吹き込む.

流体力学 … 流体は広がりがある → 場は, x, y, z, t の関数

- お互いに作用を及ぼし合う流体粒子の集まり.
  (x, y, z) は流体粒子の位置 → t のみの関数
- 回転系のナビエ・ストークスの式, 連続の式
  $$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + K\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}, \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$
- $\dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla$ $\begin{cases}\text{全微分 (ラグランジュ的)} \cdots \text{流体粒子の値の時間変化} \\ \text{偏微分 (オイラー的)} \cdots \text{場所の値の時間変化} \\ \text{移流項} \cdots \text{流れによる寄与}\end{cases}$

連続の式 (質量の保存)

ある瞬間の流体を分割する

- 「枠」で分ける (枠は移動せず, 大きさは変わらない)
  枠に入ってくる質量と出て行く質量の差が枠内の密度の変化を作る
  (枠内の質量は保存しない)
  $$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) \qquad \text{(右辺は「発散」→多く出て行く→密度が減少)}$$
- 「風船」で分ける (流体は風船から出ない → 風船内の質量が保存する)
  風船の体積の変化が風船内の密度の変化を作る
  $$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla\cdot\mathbf{u}) \qquad \text{(右辺は「発散」→体積が増える→密度が減少)}$$
- 「流体粒子」の考え方
  - 空気は目に見えない風船に入っている.
  - 大気は風船ですきまなく埋め尽くされている.

  ある風船が $\begin{Bmatrix}\text{膨らむ} \\ \text{動く}\end{Bmatrix}$ と, 周囲の風船は $\begin{cases}\text{押し縮められる} \\ \text{動く}\end{cases}$

非圧縮流体

連続の式… $\dfrac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ $\qquad \dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{M}{V}\right) = -\dfrac{M}{V^2}\dfrac{DV}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u}$

もし流体が圧縮されない → 流体粒子の体積が変化しない ↔ 流れの発散は 0
$$\frac{DV}{Dt} = 0 \;\leftrightarrow\; \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$
密度のラグランジュ微分は 0 (一般には $\boxed{\nabla\cdot\mathbf{u} = 0}$ を使う)
海洋では (大気でも), よい近似となる (非圧縮近似)

ラグランジュ的なイメージ $\begin{cases}\text{圧縮流体:}\quad \text{風船に入った空気} \\ \text{非圧縮流体: 鉄の箱に入った空気}\end{cases}$

オイラー微分は 0 ではない… $\dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0$ (移流項が残る)

初期に流体粒子の密度がそれぞれ異なれば, どこから流体が流れてきたかで, その場所の密度が変わる.

$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ であるには, さらに $\nabla\rho = 0$ が必要 (密度一様の仮定)

初期に密度が一様であれば, その後は不変なので, 密度一様が保たれる

ナビエ・ストークスの式 (運動量の保存)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + K\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}$$

連続の式: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$

- 運動量 $\rho\mathbf{u}$ は保存する (質量保存の導出と同じ: $\rho \to \rho u$ と書き換える)

$$\frac{D(\rho u)}{Dt} + (\rho u)\nabla\cdot\mathbf{u} = \rho\frac{Du}{Dt} + u\frac{D\rho}{Dt} + u\rho\nabla\cdot\mathbf{u} = \rho\frac{Du}{Dt} + u\left[\cancel{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}}\right] = 0$$

  (u, v, w) のそれぞれの式ができる → ベクトル
- コリオリ力 $(2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u})$ や外力 ($\mathbf{F}$, 重力等). ※単位質量あたり

ここまでは, 質点と同じ

- 流体同士が接しているため,「圧力」と「粘性」が働く.
  実際に運動に関係するのは, 力の「差」…勾配が重要
  - 圧力 p (周囲の流体に押される力) → $-\frac{\partial p}{\partial x}$ … 圧力傾度力
    ※ 圧力傾度力は圧力勾配と逆向き (高圧部から低圧部へ働く)
  - まわりとの速度の差に比例する力 $K\frac{\partial u}{\partial x}$ (周囲の動きに引っ張られる力)
    勾配を取ると $\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ …粘性 ($\leftarrow K$ を定数とする)

  ※ ちゃんとした説明ではない

水平 2 次元の運動

運動がほぼ水平 (w が u, v に比べて十分に小さい) の場合には

$$\frac{Du}{Dt} - fv = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + K_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + K_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F_x$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + K_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + K_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + F_y$$

右辺が 0 の場合の解を考える ← 流体粒子は慣性振動

- 空間的な変化がない解 (u, v がともに t のみの関数) $\cdots\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0 \ \to\ \boxed{u = V\sin(ft+\theta),\ v = V\cos(ft+\theta)}$$

- 時間的な変化がない解 (さらに, u は y のみ, v は x のみの関数とする)

$$v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = 0,\ u\frac{\partial v}{\partial x} + fu = 0 \ \to\ \boxed{u = f\times(y-y_0),\ v = -f\times(x-x_0)}$$

いずれの場合も, 非圧縮になる$\cdots\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

渦粘性

海洋や大気の大規模な運動を考える場合, 水分子などのランダムな運動による粘性 (分子粘性) はほとんど効果がない. しかし, 海洋や大気が作る「渦」(乱流) が分子粘性と同様の効果を持ち,「渦粘性」とよぶ.

流れはほとんど水平方向なので, 水平の渦の方が強く, 水平方向の係数が鉛直方向の係数よりも大きい.

$$K_H\left(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial y^2}\right) + K_V\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2} = K_H\nabla_H^2\mathbf{u} + K_V\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}$$

$\left[\nabla_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0\right)\right.$ (∇ の水平成分)$\left.\right]$

渦粘性係数の値はよくわかっていない
係数は, おそらく定数ではない (場所や流れ方で異なる)
ラプラシアン (2 階微分) とするべきかどうかも定かでない

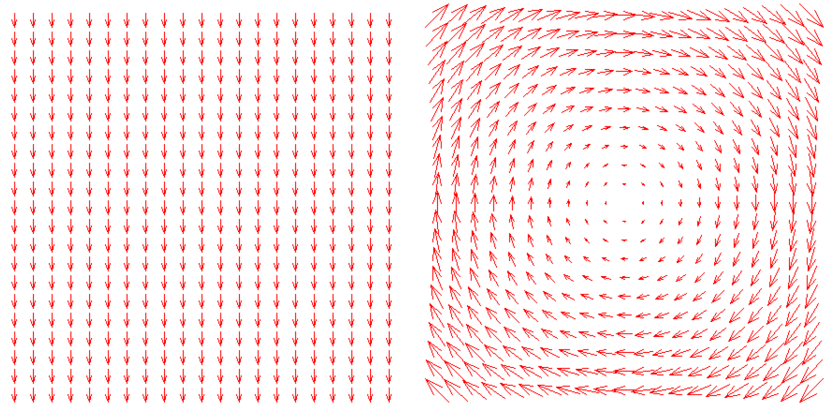
海洋の場合, オーダー (目安の桁) として, K_H=10^2m^{2}s^{-1}, K_V=10^{-4}m^{2}s^{-1}
※ 水の分子粘性係数: 10^{-6} m^{2}s^{-1} (空気は 1.5×10^{-5} m^{2}s^{-1})
渦粘性係数を決められないことが予報における最大の弱点

水温や塩分などが「渦」で混ざる効果…「渦拡散」
「渦混合」「渦動粘性」「乱流粘性」など, いろいろな呼び方がある.

流体の慣性振動

流速ベクトルの水平分布

空間変化がない解　　　　時間変化がない解

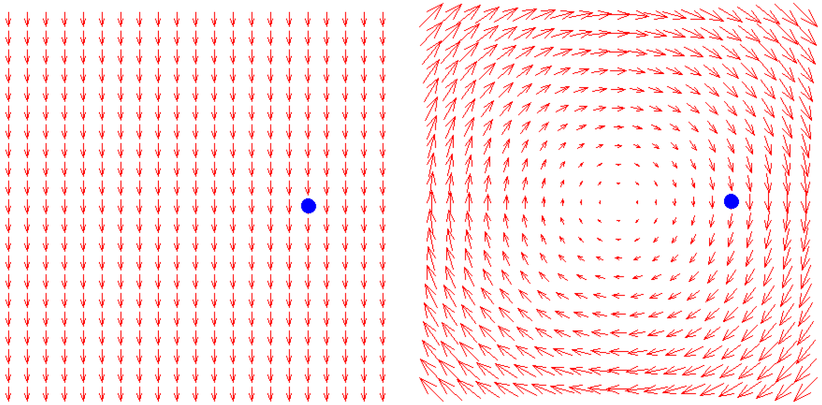


実際にどのような場になるかは, 初期条件と境界条件で決まる.
t は 1 階微分 → $t = 0$ における場の値 (全点の分布)
x は 2 階微分 (粘性を含む) → $x = 0$ と $x = L$ (西端と東端) の各時刻の値

流体粒子の慣性振動

流体粒子の軌跡

空間変化がない解　　　　時間変化がない解



定常→流速ベクトルと流体粒子の軌跡は一致

どちらも慣性周期で円を描く (半径は初期値による)

※ 流体粒子の運動には, 質点の知識が使える

地上天気図

気圧の高い方を右に見て, 等圧線に沿って風が吹く (北半球)

- 高気圧は, 時計回り
- 低気圧は, 反時計回り (台風)
  強い低気圧 → 等圧線が込む
- 冬型の気圧配置: 西高東低
  →西側が高気圧なので, 地衡風は北風 (南向きの風)
  →寒い

地面の抵抗 (摩擦) を考えると, 低気圧側に傾く
(地面から離れるほど, 影響は小さくなる)

ほぼ地衡風だが, 完全に地衡風ではないので, 天気は変化する.

気象庁発表の実況天気図

地衡流 (地衡風)

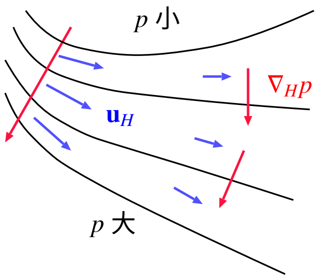
コリオリ力と圧力傾度力が釣り合った状態

条件: これら 2 項に比べて,
- 時間変化が小さい
- 運動量の移流が小さい (流速が水平的に一様)
- 粘性が小さい

$$-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

圧力場が分かれば, 地衡流速 (風速) を計算できる

$$u = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad v = \frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}$$



等間隔の等圧線
- 間隔が狭い → 勾配が大
- 間隔が広い → 勾配が小

- 等圧線に沿って動く (北半球では高圧部が右側にくる)

$$\mathbf{u}_H \cdot \nabla_H p = 0$$

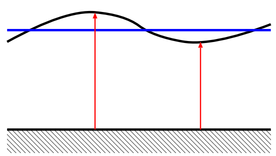
- 勾配が大きい (等圧線が密な) 場所ほど, 速度は速い

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{|\nabla_H p|}{\rho f}$$

高層天気図

高層天気図は, 等圧面の高さと, 等圧面上の気温などを描いたもの

気象庁
500hPa (約 5000m 上空)
※ ほぼ地衡風



等圧面と高度の関係
(断面の模式図)

静水圧を考えると (※ 地図での等高線と同じ)
- 高圧 → 上にたくさん水が載っている → 水面は盛り上がっている
- 低圧 → 水面はへこんでいる

海流と海面高度

広い範囲の流速 (風速) を測るのは難しい (地形などの影響を受けやすい)
→ 圧力の分布を調べて, 地衡流 (地衡風) を推定する

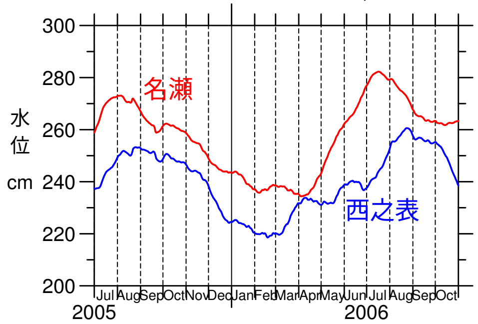
同じ水平面 (等ジオポテンシャル面) 上の気圧や水圧が必要
(あるいは, 等圧面の高さ)
※ 水平面と等圧面が一致する (水平面上で圧力が一定) ならば, 地衡流は 0

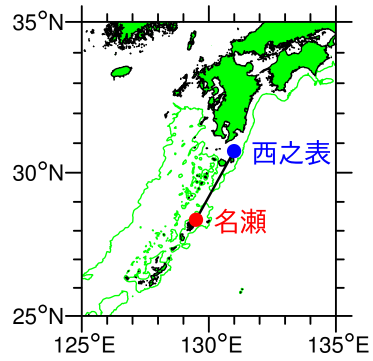
観測の高さが水平面からずれている場合, 流体の密度を使って, 静水圧で補正
※ 海水の場合, 高度差 1m は 1dbar に相当
※ 地上天気図は, 海抜 0 メートルに換算した気圧

ジオイドは, 静止水面のことで, 水平面の基準.
※ 海面がジオイドと一致すると, 地衡流は流れない

黒潮と潮位

名瀬 (奄美大島) と西之表 (種子島) の潮位
(30 日の移動平均→ 潮汐などを除く)





※ それぞれの基準面から高さ (名瀬の方が 1m ぐらい高い)
黒潮を挟んで (距離は約 300km) で 40cm 以上の潮位差の変動がある.

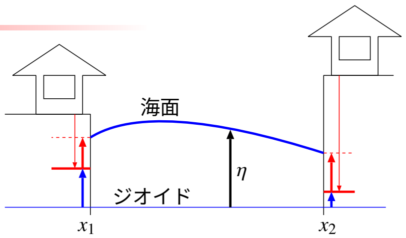
海峡間の平均流速の変動 $v = \dfrac{g}{f}\dfrac{\Delta\eta}{L} = \dfrac{9.8}{7.3\times10^{-5}} \times \dfrac{0.4}{300\times10^{3}}$ = 0.18 m s^{-1}

- 名瀬の方が, より高い → 海峡間の流れが強くなる
- 流速の時間平均値 → 検潮所のジオイドからの高度差に対応

検潮所

検潮所では, 海面の高さを測っている.

検潮所ごとの基準面 (赤線) からの高さを記録. ジオイドから基準面までの高さは不詳.



- ジオイドからの高さ $\eta(x)$
  → ジオイドにおける圧力 $p(x) = p_0 + \rho g \eta$
  (p_0: 大気圧, ρ: 海水の密度, g: 重力加速度 ← 定数とみなせる)
- ジオイドでの流速 $v(x)$

$$fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{\rho f}\frac{\partial(\rho g \eta)}{\partial x} = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

- 検潮所の間の平均流速 $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} v\,dx = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx = \frac{g}{\bar{f}}\frac{\eta(x_2) - \eta(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{g\Delta\eta}{\bar{f}L}$$

$\bar{f}$: 検潮所の中間の緯度のコリオリ係数; $\Delta\eta$: 潮位差, L: 距離 $(x_2 - x_1)$

- η の値そのものは不詳 → 流速はわからない
  η の時間変動はわかる (基準面の高さは変化しない) → 流速の時間変動がわかる

人工衛星による海面高度

マイクロ波で衛星と海面の距離を求め, 衛星の高さは GPS で求める.

ジオイドが正確に分からないので, 時間平均を除いた分布 (一時的な渦を表す)

地衡流は, 北半球では, $\begin{cases} \text{海面の高い (赤い) 部分を時計回りに流れる.} \\ \text{海面の低い (青い) 部分を反時計回りに流れる.} \end{cases}$

CTD による海面高度

ジオイドからの海面のずれ
等値線は 10cm 間隔

地衡流は…
線に沿って流れる
北半球は高い側が右
線が込んでいると速い

日本の
南が黒潮
東が黒潮続流
約 1m の高度差がある

1000m の深さに流れがない (水平面=等圧面) とし, 水温・塩分の観測から密度を求めて, 海面水位を推定したもの
海面が高い → 軽い水

Wyrtki (1975)

fujio@aori.u-tokyo.ac.jp