流体地球科学 第 7 回

東京大学 大気海洋研究所 准教授
藤尾伸三
http://ovd.aori.u-tokyo.ac.jp/fujio/2015chiba/
fujio@aori.u-tokyo.ac.jp

2015/11/27

最終更新日 2015/11/24

前回のポイント

回転系における水平運動
※ 流体における水平の圧力勾配は, 斜面沿いの重力と同じ (高→低に動く)

- 慣性振動 (円運動)…コリオリ力と遠心力がバランス (外力なし)
  - 北半球 (コリオリ力が右向き) では時計回りの等速円運動
  - 速度 V, 半径 R とすると, $fV = V^2/R \to R = V/f$
  - 1 回転する時間…慣性周期 → $2\pi/f$ ($f = 2\Omega \sin\phi$: コリオリ係数)
    場の自転周期の半分 (極で半日, 緯度 30 度で 1 日)
- 地衡風・地衡流 (直線/円運動) … 圧力傾度力とコリオリ力がバランス
  - 北半球では高圧部 (山であれば頂上) を右に見て, 等圧線 (等高線) に沿う
    高気圧では時計回り, 低気圧では反時計回りの運動
  - 海洋や大気の大規模な運動
- 旋衡風・旋衡流 (円運動) … 圧力傾度力と遠心力がバランス
  - 中心は低圧部で, 時計回りも反時計回りもある
  - 普通にいう「渦」

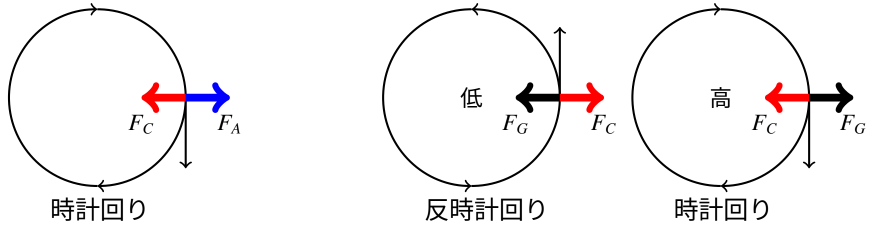
これらのまざった運動…{ 斜面上のサイクロイド (慣性振動＋地衡風)
傾度風 ← これから説明

※ コリオリ力が有意に働くためには, 慣性周期程度の持続時間が必要

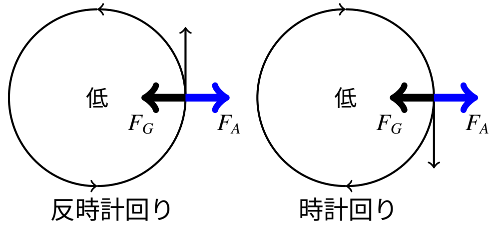
力のバランス

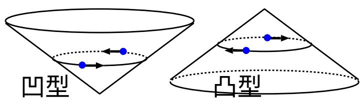
永遠に回れるバランス (以下, 北半球＝コリオリ力は進行方向の右向き)

- 慣性振動: 遠心力＝コリオリ力
- 地衡風: コリオリ力＝圧力傾度力



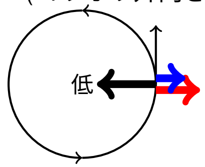
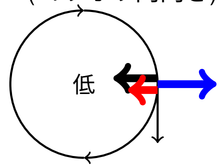
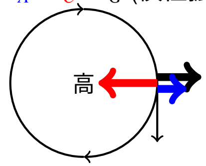
- 旋衡風: 遠心力＝圧力傾度力





傾度風

遠心力 F_A ＋コリオリ力 F_G ＋圧力傾度力 F_G
コリオリ力と圧力傾度力がそれぞれ内向きか, 外向きかで組合わせは 4 通り
合力のどちらが大きいかで, さらに 2 通り　　※ 速度や半径は図で異なる

(遠心力は常に外向き)	反時計回り (コリオリ外向き)	時計回り (コリオリ内向き)
低気圧 (圧力内向き)	 $F_G \approx F_C > F_A$ (地衡風的) $F_G \approx F_A > F_C$ (旋衡風的)	 $F_A \approx F_G > F_C$ (旋衡風的) $F_A \approx F_C > F_G$ (慣性振動的)
高気圧 (圧力外向き)	なし すべての力が外向き	 $F_C \approx F_G > F_A$ (地衡風的) $F_C \approx F_A > F_G$ (慣性振動的)

- 反時計回りの高気圧は存在しない

fujio@aori.u-tokyo.ac.jp

傾度風の分類

圧力傾度力に対して, コリオリ力と遠心力のどちらが重要か.
(圧力傾度力が弱い＝慣性振動的なバランスを除く)

- 高気圧は必ず時計回りで, 地衡風的
- 低気圧は時計回りならば, 旋衡風的
  反時計回りならば, 地衡風的なものと旋衡風的なものがある

力を比べてもよいが, 周期を比べる (慣性周期は緯度のみで決まる).

遠心力 $F_A = \dfrac{mV^2}{R}$　　コリオリ力 $F_C = fmV$

回転の周期 $T_A = \dfrac{2\pi R}{V}$　　慣性周期 $T_C = \dfrac{2\pi}{f}$

$$\begin{cases} F_A > F_C \quad (T_A < T_C) \cdots \text{旋衡風的 (1 周が慣性周期より速い)} \\ F_A < F_C \quad (T_A > T_C) \cdots \text{地衡風的 (1 周が慣性周期より遅い)} \end{cases}$$

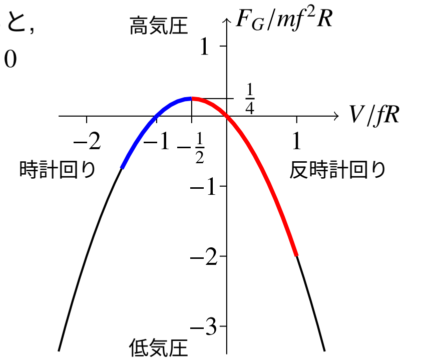
傾度風のバランス

力は外向き, 回転は反時計回りを正とすると,
遠心力 + コリオリ力 + 圧力傾度力 = 0

$$\frac{mV^2}{R} + fmV + F_G = 0$$

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{fR}{2}\right)^2 - \frac{RF_G}{m}}$$

- $F_G = 0$ ならば, $V = 0, -fR$
  (静止または慣性振動)
  $|V| > fR \rightarrow$ 遠心力 > コリオリ力
- 根号の中は 0 以上から,
  $$F_G \leq \frac{m}{R}\left(\frac{fR}{2}\right)^2 = \frac{mf^2R}{4}$$
  低気圧 ($F_G < 0$) に上限はないが, 高気圧 ($F_G > 0$) には上限がある.
  (上限を超える高気圧は, 安定的に存在できない)
  上限の高気圧では, 慣性振動の半分の角速度 (地球の自転角速度) で回る
- 大規模な海洋や大気は原点付近 → 地衡風



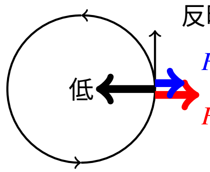
黒:旋衡風的, 青:慣性振動的, 赤:地衡風的
(色分けは適当)

台風

2007 年台風 4 号 (7 月 13 日)

$\begin{cases} \text{強風域: 風速 15m s}^{-1} \text{ (54km/時) 以上 (黄線)} \\ \text{暴風域: 風速 25m s}^{-1} \text{ (90km/時) 以上 (赤線)} \end{cases}$

大型の台風…強風域の半径が 500km 以上



反時計回り, 低気圧

$F_A = \dfrac{V^2}{R}$, $T_A = \dfrac{2\pi R}{V}$

$F_C = fV$, $T_C = \dfrac{2\pi}{f}$

(m=1kg とする)

風速 V	15m s^{-1}	25m s^{-1}
半径 R	500km	200km?
遠心力 F_A	0.45×10^{-3}	3.12×10^{-3}N
コリオリ力 F_C	1.22×10^{-3}	2.04×10^{-3}N
回転周期 T_A	58 時間	14 時間
慣性周期 T_C	21 時間	21 時間
	地衡風的	旋衡風的

抵抗が働く場合

速度にボールの速度に比例して, 進行方向と逆向きに力が働くとする.
係数 r は時間の逆数.
(摩擦 $\mu' mg$ は速度に比例しないので, 空気抵抗等を考える.)

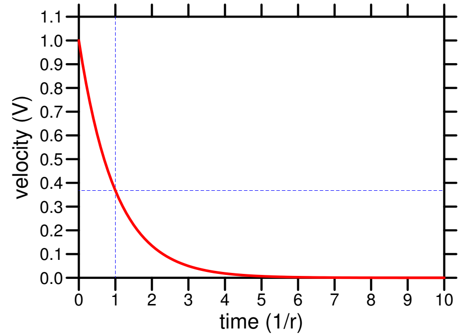
抵抗が働く場合の運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -mrv$$

一般解は指数関数.

初期 $t = 0$ の速度を V とすれば

$$v = V e^{-rt}$$



速度は指数関数的に減衰し, 時刻 $t = 1/r$ のとき, $1/e$ (=0.37) になる.
$t = 1/r$ をダンピング時間という ($t = 0.7/r$ で速さは半分, 半減期).

ダンピング時間に比べて, 十分に長い時間が経つと, 止まる.

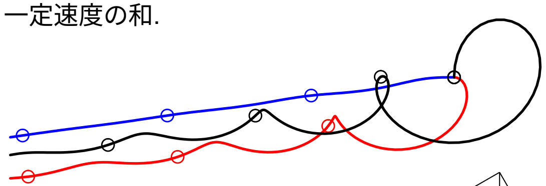
抵抗が働く斜面での運動 (地衡風)

運動方程式と一般解 (コリオリ力も抵抗も速度に比例. 向きが異なる)

$$m\frac{du}{dt} - fmv = -mru, \quad m\frac{dv}{dt} + fmu = -mgs - mrv$$

$$u = V e^{-rt}\sin(ft+\theta) - \frac{fgs}{f^2+r^2}, \quad v = V e^{-rt}\cos(ft+\theta) - \frac{rgs}{f^2+r^2}$$

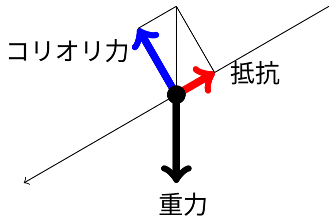
減衰する振動と一定速度の和.



十分に長い時間 ($rt \gg 1$) がたつと, 初期条件によらず, 等速直線運動になる

$$u = -\frac{fgs}{f^2+r^2}, \quad v = -\frac{rgs}{f^2+r^2}$$

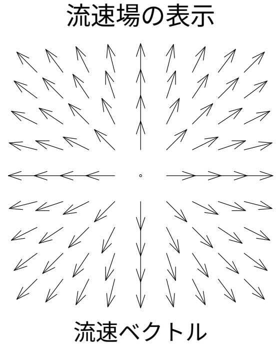
※ 地衡風 ($r=0$) と終端速度の落下 ($f=0$)

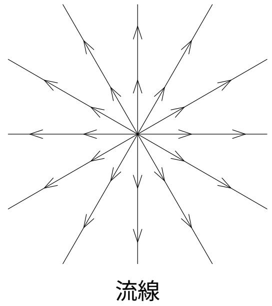


抵抗が働かないと, コリオリ力のため, もとの高さに戻る (落下しない)

流体力学

- 流体には空間的広がりがある…「場」
  (速度場, 密度場, …)
- 流体を微小な部分 (流体粒子, 流体要素) に分ければ, それぞれは質点として扱うことができる
- 流体粒子同士は力 (圧力や摩擦) をおよぼし合う
- 定常…場が時間変化しないこと
  → 静止ではない.
- 流線…ある瞬間の流速ベクトルをつないだもの
  流体は流線に沿って流れる
  → 定常な場では流体粒子の軌跡 (流跡線) と一致する

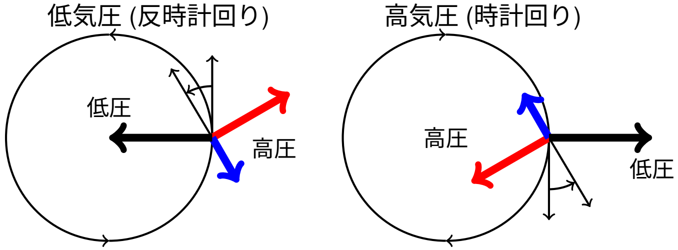




抵抗が働く場合の低気圧・高気圧

コリオリ力＋圧力傾度力＋抵抗　(※風は陸面・海面から抵抗を受ける)

風向に対して, 抵抗は逆向き, コリオリは右向き→ 合力は右後方
(物体は低圧部に動く → コリオリが右向き, 抵抗が逆向きにかかる)



※ 回りながら, 低気圧には吹き込み, 高気圧からは吹き出る

考え方: $\left\{\begin{array}{l}\text{地衡風と低圧部への運動の和}\\ \text{低圧部への運動がコリオリ力で右に曲がった}\end{array}\right.$

物体が斜面を転がれば, 山は低くなり, 谷は埋まる → 斜面が解消 → 運動なし
同様に, 空気の移動で気圧差が解消され, 低気圧・高気圧は消える.

回転系での流体運動の基礎方程式

ナビエ・ストークスの式 (単位質量あたりの運動量保存の式)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + K\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}$$

連続の式 (質量保存の式)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

- 位置 (x, y, z), 時間 t
- 流速ベクトル $\mathbf{u} = (u, v, w)$, 密度 ρ ← 求めるべき値
  それぞれ $u(x, y, z, t)$ のように 3 次元的な分布を持つ
- 圧力 p
- 動粘性係数 K　(ギリシャ文字「ν」がよく使われるが)
- 自転の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega\cos\phi, \Omega\sin\phi)$
- (単位質量あたりの) 外力 $\mathbf{F}$ (重力など)

ベクトルの微分

スカラー p, ベクトル $\mathbf{u} = (u, v, w)$ にナブラ $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ を使うと,

- 勾配 (gradient)…スカラー → ベクトル

$$\nabla p = \mathrm{grad}\ p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

- 発散 (divergence)…ベクトル → スカラー

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathrm{div}\ \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- 回転 (rotation または curl)…ベクトル → ベクトル

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathrm{rot}\ \mathbf{u} = \mathrm{curl}\ \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

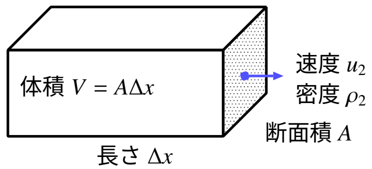
- ラプラシアン (Laplacian, ∇^2=△)…スカラー → スカラー, ベクトル → ベクトル

$$\nabla^2 p = (\nabla \cdot \nabla) p = \nabla \cdot (\nabla p) = \mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u, \nabla^2 v, \nabla^2 w)$$

質量保存の式

[導出 1] 静止した長方形の枠を考える.
枠の中を流体が通過



枠の左端と右端での流体の速度を u_1, u_2.
密度を ρ_1, ρ_2 とする.

Δt 時間に枠に入る質量 … それぞれ $\rho_1 u_1 A \Delta t$, $-\rho_2 u_2 A \Delta t$

質量の増加 $\Delta M = (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2) A \Delta t$

密度 $\rho = M/V$ の時間変化 (V は時間変化しないので)

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{\Delta M}{V}\frac{1}{\Delta t} = \frac{(\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2) A \Delta t}{A \Delta x}\frac{1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\Delta x} = -\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}$$

位置を固定した場合 (x や y を変化させずに, t だけを変化させた偏微分)

質量の保存 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$

※ 入ってくるより出ていく質量が多い (発散する) と, 密度は小さくなる

偏微分と全微分

偏微分…ふたつ以上の変数に従属する関数で, ひとつの変数だけを変化させて, ほかを変化させないときの導関数

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

※ 場所を動かずに, 値の時間変化を見ている
(駅のホームで, 通過する電車の込み具合を見る … 駅ごと)

全微分…x, y, z が t の関数であるとき, $\rho(x, y, z, t)$ を t で微分する.

$$\frac{d\rho}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t), t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

(x, y, z) が物体の位置とすると, その時間微分は物体の速度 (u, v, w) を表し,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho)$$

物体の値 ρ は, もともと t のみの関数だから, 左辺は, 普通の微分になる.
※ 流体とともに移動しながら, 値の時間変化を見ている
(電車にのって, 車内の込み具合を見る … 電車ごと)
※ 流体の時間の全微分には, 大文字 D を使う場合が多い … $\dfrac{D\rho}{Dt}$

質量保存の式

[導出 2] 流体粒子を追跡する (伸び縮みする箱)

体積 V は変化するが, 質量 M は変化しない

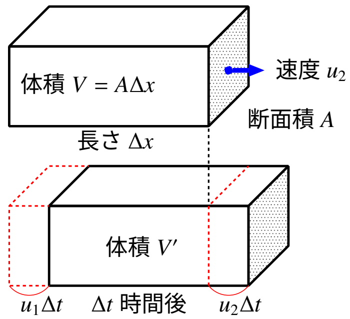
左端の水は速度 u_1, 右端の水は速度 u_2 で動いているので, Δt での体積の増加

$$\Delta V = (u_2 - u_1) A \Delta t$$

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{A\Delta x}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{M}{V}\right) = -\frac{M}{V^2}\frac{DV}{Dt} = -\frac{\rho}{V}\frac{DV}{Dt}$$

$$= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$



※ 膨らむ (発散する) と, 密度が小さくなる

全微分であれば, 質点の考え方が使える.

移流項

二通りの導出を比べると, 全微分と偏微分の関係を確かめられる.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = \underbrace{-\rho(\nabla\cdot\mathbf{u})}_{D\rho/Dt} - (\nabla\rho)\cdot\mathbf{u} \quad\rightarrow\quad \underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}_{\text{ラグランジュ}} = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{オイラー}} + \underbrace{\mathbf{u}\cdot\nabla\rho}_{\text{移流項}}$$

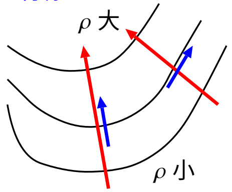
$$\boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}}$$

オイラー微分 $\partial/\partial t$ ⋯ 位置を固定 (時間についての偏微分)
ラグランジュ微分 (物質微分) D/Dt ⋯ 流体粒子を固定 (時間についての全微分)

移流項 $\mathbf{u}\cdot\nabla$ ⋯ 流速ベクトルと場の勾配ベクトルの内積 $\mathbf{u}\cdot(\nabla\rho) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho$

- ベクトルが直交する (流れが等値線に沿う) ならば, 0.
- ベクトルが同じ向きならば, 流れは値の小さいものを大きい方に運ぶ⋯値は小さくなる.

黒線: ρ の等値線
赤線: $\nabla\rho$ ベクトル
青線: $\mathbf{u}$ ベクトル



冷たい西風が吹く ($u > 0$, $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$) → 移流項は正

移流項は, その場所の気温 T を下げる → $\frac{\partial T}{\partial t} < 0$

※ 空気とともに移動すると, 気温は変化しない → $\frac{DT}{Dt} = 0$

fujio@aori.u-tokyo.ac.jp