流体地球科学 第6回

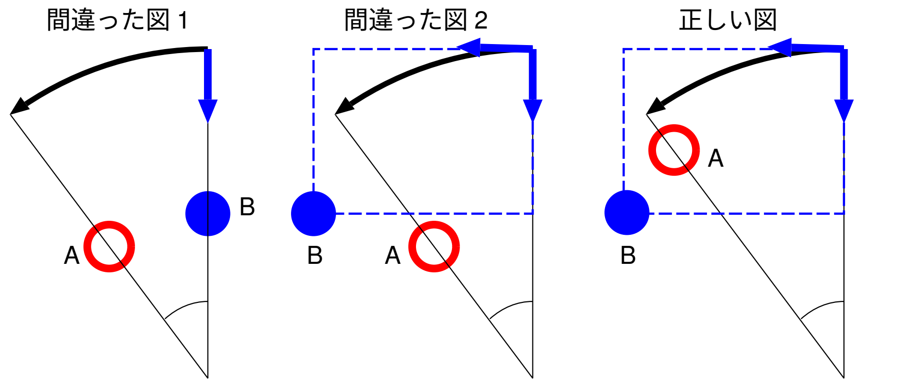
東京大学 大気海洋研究所 准教授
藤尾伸三
http://ovd.aori.u-tokyo.ac.jp/fujio/2015chiba/
fujio@aori.u-tokyo.ac.jp

2015/11/20

最終更新日 2015/11/24

外から中心に投げたボールは?

回転盤の外から見た図
A (○) 期待される位置, B (●) 実際の位置



ボールは左 (A → B) に曲がった???

図 2 は遠心力が考慮されていない

前回のポイント

運動の法則…力 (単位: N) = 運動量の時間変化 = 質量 × 加速度

- 回転する座標系では, 「遠心力」と「コリオリ力」が必要.
  ただし, 地球の自転による遠心力は「重力」に含まれるので, 考えない.
- 地球の自転角速度 $\Omega = \dfrac{2\pi}{24\,\text{時間}} + \dfrac{2\pi}{1\,\text{年}} = 7.29\times10^{-5}\text{s}^{-1}$
- 回転系での運動方程式 (3 次元)…x: 東向き, y: 北向き, z:上向き

$$m\frac{du}{dt} - 2\Omega\sin\phi\times mv + 2\Omega\cos\phi\times mw = F_x$$
$$m\frac{dv}{dt} + 2\Omega\sin\phi\times mu = F_y$$
$$m\frac{dw}{dt} - 2\Omega\cos\phi\times mu = F_z$$

ベクトル表記

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}\times m\mathbf{u} = \mathbf{F}$$
$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega\cos\phi, \Omega\sin\phi)$$

※ 赤道 $\phi = 0$ でも, コリオリ力はある (水平面上 $w = 0$ だと, 0 になる)

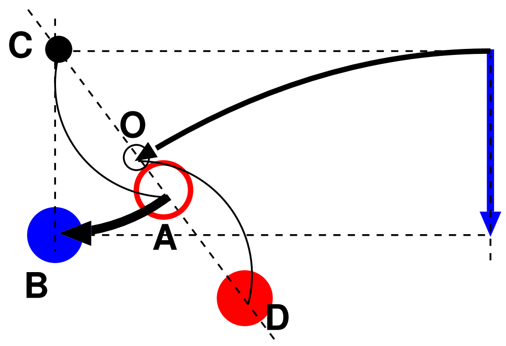
- 回転系での運動方程式 (水平 2 次元)… w が小さい場合

$$m\frac{du}{dt} - fmv = F_x, \quad m\frac{dv}{dt} + fmu = F_y$$

コリオリ係数 $f = 2\Omega\sin\phi$ (角速度の 2 倍)

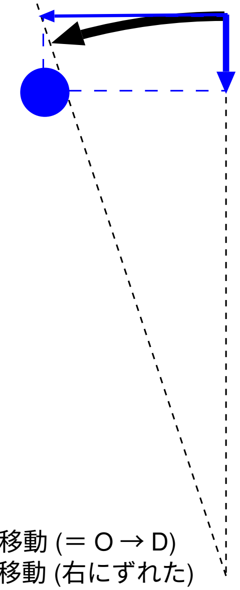
※ 授業では, 特に記載ない場合, 北半球を想定する ($f > 0$)

外から中心に投げたボールの解釈



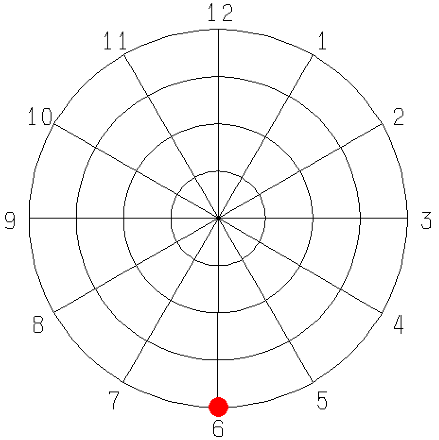
O (○) 投げた人の位置
D (●) 遠心力・コリオリ力を考慮しない
C (●) 投げなかった場合
A (○) 遠心力のみ考慮
B (●) 実際の位置

O → C 遠心力による移動
C → A 投げたことによる移動 (= O → D)
A → B コリオリ力による移動 (右にずれた)

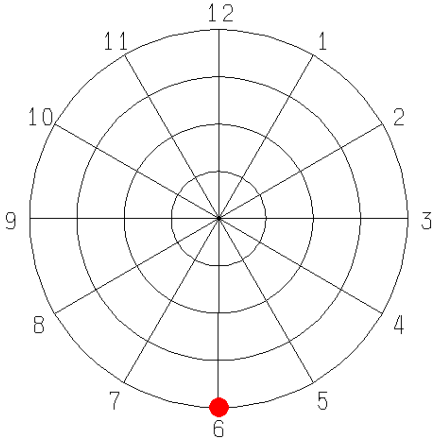


外から中心に投げたボールの動画 1

中心に向かってまっすぐ投げる



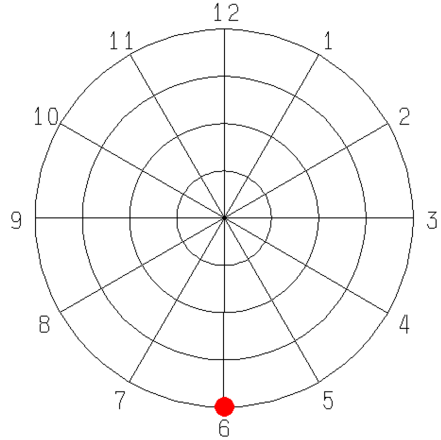
円盤の外から見る図
斜めに飛んでいく

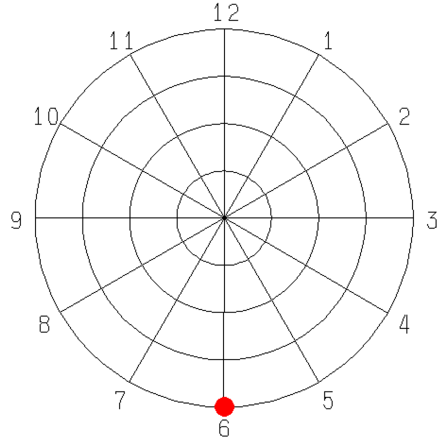


投げた人が見る図
コリオリ力と遠心力で後ろに飛ばされる

回転盤でボールをキャッチ

円盤の回転速度とボールの速度を合わせれば, 投げたボールを取れる
(投げた人にはボールが回ってくるように見える)
投げてからの時間は, 回転の半周期

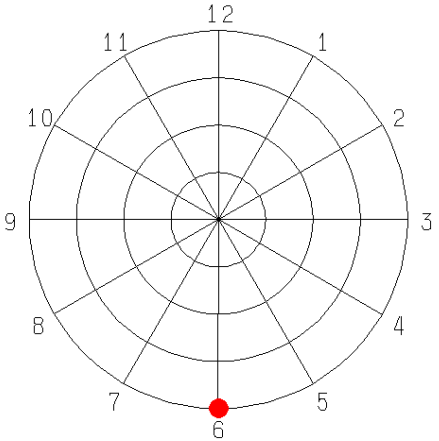




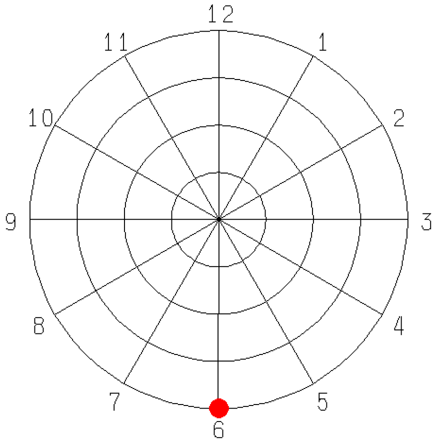
中心を通るように投げる

外から中心に投げたボールの動画 2

中心を通るように投げる



円盤の外から見る図
斜めに投げる



投げた人が見る図
コリオリ力で右に曲がることを考慮

水平面での運動

慣性の法則…物体は力が加わっていないと, 等速直線運動する
回転系での「慣性運動」は? … 慣性振動

水平面上 ($w \equiv 0$) で, 力が作用していない場合, 運動方程式は

$$m\frac{du}{dt} - fmv = 0, \quad m\frac{dv}{dt} + fmu = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u}{dt^2} + f^2 u = 0$$

この常微分方程式 (波動方程式) の一般解は, V と θ を積分定数として,

$$u = V\sin(ft + \theta), \quad v = V\cos(ft + \theta)$$

(あるいは, $u = A\sin ft + B\cos ft, \quad v = A\cos ft - B\sin ft$)

- 速度は u も v も単振動 …速度ベクトルは角速度 f で回転する
- 速度ベクトルの大きさは変化しない (向きが変わるだけ)
  (運動エネルギー $\frac{1}{2}m(u^2 + v^2)$ は変化しない)

初期条件として, 時刻 $t = 0$ で $u = u_0$, $v = v_0$ とすれば,
$V = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(v_0/u_0)$ に決まる.

慣性円

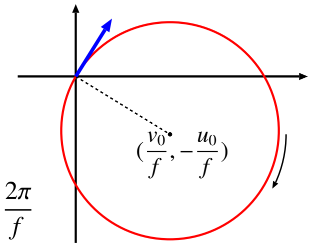
物体が $t = 0$ に原点にあったとすれば，$\dfrac{dx}{dt} = u = \dfrac{-1}{f}\dfrac{dv}{dt}$ から，t 経過の x 座標は，

$$x = \int_0^t u\,dt = \int_0^t \frac{-1}{f}\frac{dv}{dt}dt = \frac{-1}{f}[v(t) - v(0)] = -\frac{V}{f}\cos(ft + \theta) + \frac{v_0}{f}$$

同様に，$y = \dfrac{V}{f}\sin(ft + \theta) - \dfrac{u_0}{f}$

よって，物体の軌跡は

$$\left(x - \frac{v_0}{f}\right)^2 + \left(y + \frac{u_0}{f}\right)^2 = \left(\frac{V}{f}\right)^2$$



すなわち，物体は円を描く（「慣性円」）

円の半径 $R = \dfrac{V}{f}$，角速度 $\omega = \dfrac{V}{R} = f$，周期 $T = \dfrac{2\pi R}{V} = \dfrac{2\pi}{f}$

※ 系の角速度 $\Omega = \dfrac{f}{2}$，周期 $\dfrac{2\pi}{\Omega} = 2T$

[別解] コリオリ力 (fV) と遠心力 ($R\omega^2 = V^2/R$) が釣り合う ← 回転方向

→ $fV = \dfrac{V^2}{R}$ より $R = \dfrac{V}{f}$

慣性振動の緯度依存性

- 回転の向きは $\begin{cases}\text{北半球は，時計回り}\\ \text{南半球は，反時計回り}\end{cases}$ （赤道上では，直進）

  $\begin{cases}\text{北半球}\\ \text{南半球}\end{cases}$ では，コリオリ力は進行方向に対して $\begin{cases}\text{右向き}\\ \text{左向き}\end{cases}$ に働く

- 慣性周期…一周に要する時間（周期）

  $$T = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi}{2\Omega\sin\phi} = \frac{T_E}{2\sin\phi} \quad \left[T_E = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ は地球の自転周期（約 1 日）}\right]$$

  緯度が低いほど，周期は長い（速度に依らない）

  $\begin{cases}\text{赤道…慣性振動しない（周期無限大）}\\ \text{北極…自転周期の半分（半日）}\\ \text{北緯 30 度…}\sin\phi = 1/2 \text{ だから，自転周期（1 日）}\end{cases}$

- 回転の半径 $R = \dfrac{V}{f}$.

  → 初速が大きいと，半径は大きい.
  → 緯度が低いと，半径は大きい（赤道 $f = 0$ では半径無限大→直線運動）

慣性振動

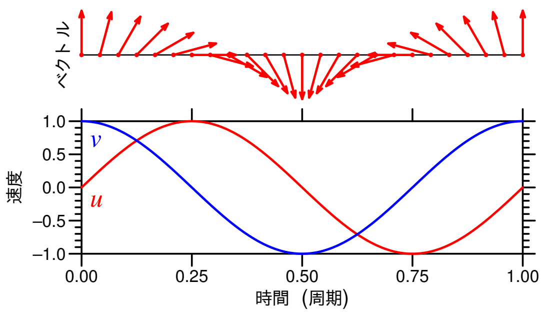
回転系で，周囲から力をうけない場合の運動 → 等速円運動

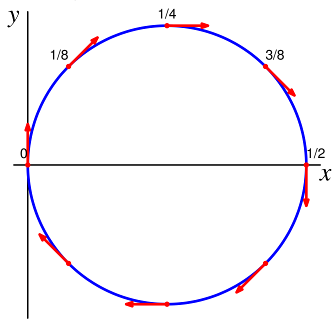
コリオリ力で進行方向が曲げられる（速さは変化しない）
※ コリオリ力と，円運動に伴う遠心力がバランスしている

速さ V，コリオリ係数 f → 円の半径 $\dfrac{V}{f}$．角速度 f，周期 $\dfrac{2\pi}{f}$

初期値 $u = 0,\ v = V,\ x = y = 0$ であれば，

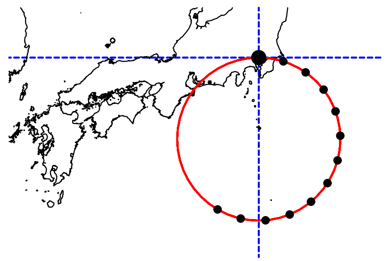
$$u = V\sin ft, \quad v = V\cos ft, \qquad x = \frac{V}{f}(1 - \cos ft), \quad y = \frac{V}{f}\sin ft$$





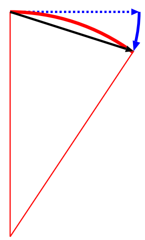
ピッチャーが投げたボールは，コリオリ力で曲がるか?

東京（緯度 35.6 度，$f = 8.5\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$）で
時速 100km の速さでボールを投げる
→ 慣性円の半径 $R = V/f = 327$km



- 地面にボールが落ちないとすれば，右図
  黒丸は 1 時間ごとの位置（12 時間後まで）
- 北緯 30 度よりも北なので，
  慣性周期は 1 日より短い（20.5 時間）.

ピッチャーマウンドとホームベースの間は 18.44m
右図の青い点線 = 黒い弦 ≈ 赤い弧（慣性円での軌道）= 18.44m
赤い弧の中心角 … 18.44m ÷ 327km = 5.6×10^{-5}rad
青い弧の中心角 … その半分 2.8×10^{-5}rad （1.6×10^{-3} 度）
曲がった距離（青い弧）… 18.44m × 2.8×10^{-5} = 0.51mm



結論: 曲がらない … 別の要因で，これ以上に右や左に曲がる
（同様に，洗面所の渦巻きもコリオリ力は関係ない）

別解: 到達時間 t = 18.44m ÷ 100km × 3600 秒 = 0.66 秒
$d^2x/dt^2 = du/dt = fV$ より $x = fVt^2/2$ = 0.51mm

慣性振動の観測例

慣性振動を観測するには, 長時間 (慣性周期程度), 物体に力が加わらず,
初速が維持される (摩擦などない) ことが必要.

北緯 30 度 (慣性周期は 1 日), 深さ 1000m に放流した中立ブイの軌跡

3.5 日間の軌跡

平均を除いた軌跡
半径は約 1 海里 (1.85km)
→ 時速 約 0.5m (徒歩は時速 4km)

Nan'niti et al. (1964)

ベータ効果

低緯度側 (西向きで) 大回りになり,
一周期で物体は「西」にずれる
※ 南半球でも西向き

コリオリ係数が緯度によって異なる
(地球は球だから)…ベータ効果

(これはその一例)

$f = 2\Omega \sin\phi$ は, 近似的に

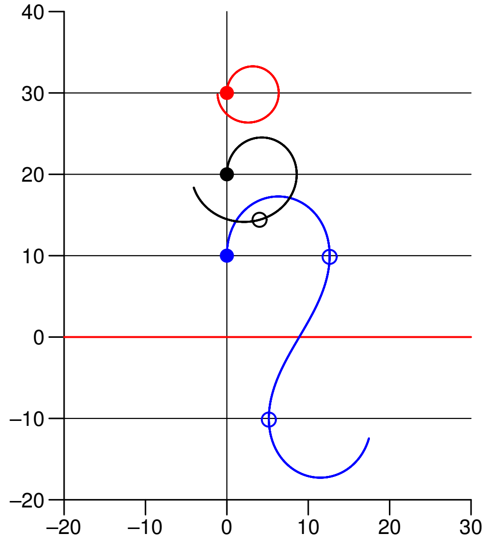
$$f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$$

$$f_0 = 2\Omega \sin\phi_0$$

$$\beta = \frac{df}{dy} = \frac{df}{d\phi}\frac{d\phi}{dy} = \frac{2\Omega}{a}\cos\phi_0$$

a は地球の半径 6400km ($y = a\phi$)
β は赤道で最大. $2.29\times10^{-11}\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$

南北の移動距離を L とすれば,
f_0 と βL を比較する



数字は緯度・経度 (の目安)
1 周期分 (○印は 1 日おき)

緯度による違い

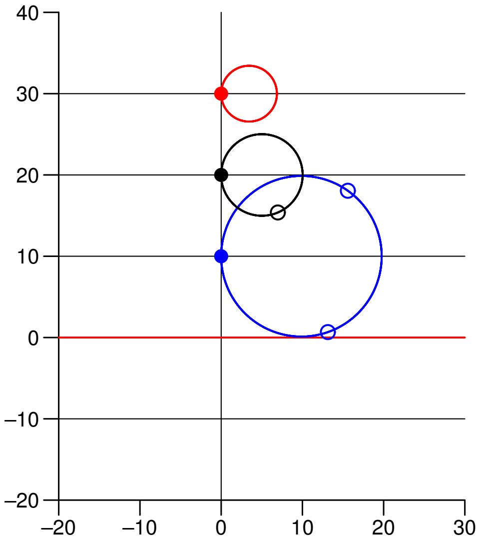
時速 100km で真北に投げた軌跡 →

低緯度ほど $\begin{cases}\text{半径 } V/f \text{ が大きい} \\ \text{周期 } 2\pi/f \text{ が長い}\end{cases}$

※ 速さは常に時速 100km

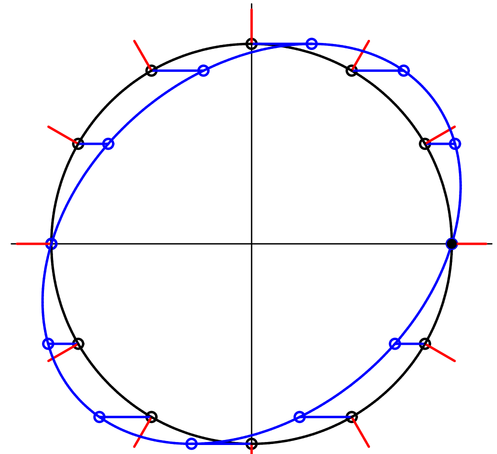
半径が大きいと, 周上の f は異なる
{ 高緯度側で小回り
{ 低緯度側で大回り
→ 円にならない

※ 半径が小さければ, 緯度による
f の違いは気にしなくてよい

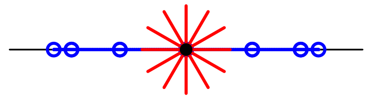


数字は緯度・経度 (の目安)
1 周期分 (○印は 1 日おき)

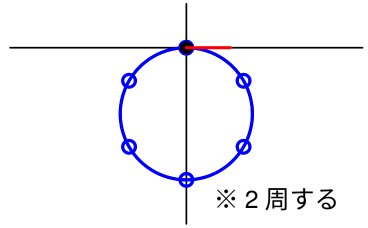
非回転系から見た慣性振動



回転していない人が見るボール



回転している人が見るボール



黒丸: 投げた人の動き
青丸: ボールの動き
赤線: 投げた人の向く方向

原点からの距離に比例した向心力が必要
$(x, y) = (1, 0)$ で, 外向き (赤線) に投げたボールの動き

※ 円盤上でちょうど半周したところで, ボールが戻ってくる

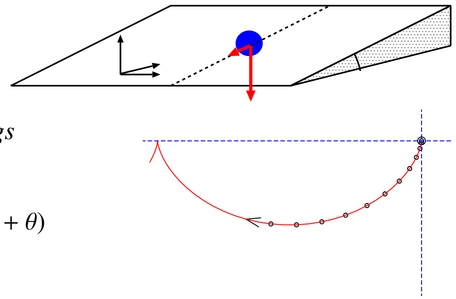
fujio@aori.u-tokyo.ac.jp

斜面での運動

水平面から y 方向に α で傾いている.
y 方向にかかる力

$$F_y = -mgs \quad (s = \sin\alpha).$$

$$m\frac{du}{dt} - fmv = 0, \quad m\frac{dv}{dt} + fmu = -mgs$$



一般解 (ベータ効果は考えず, f は定数)

$$u = V\sin(ft+\theta) - \frac{gs}{f}, \quad v = V\cos(ft+\theta)$$

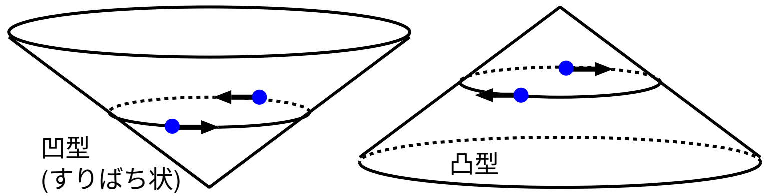
はじめに静止していたとすると,

$$u = \frac{gs}{f}(\cos ft - 1), \quad v = -\frac{gs}{f}\sin ft$$ …回転と x 方向の移動

$$x = \frac{gs}{f^2}(\sin ft - ft), \quad y = \frac{gs}{f^2}(\cos ft - 1)$$ …サイクロイド

- 運動エネルギーと位置エネルギー $mgsy$ の和が保存
- 1 慣性周期 ($T = \frac{2\pi}{f}$) で, $-x$ 方向に $\frac{gs}{f^2}\times fT = \frac{2\pi gs}{f^2}$ 移動する.
  斜面を下る向きの重力と, 上る向きのコリオリ力がバランス

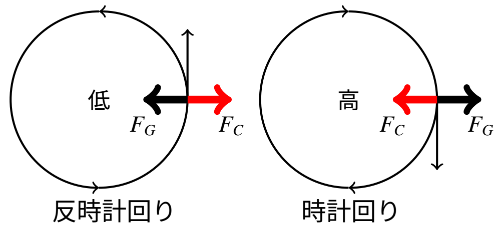
円錐状の斜面



コリオリ力 F_C と重力 F_G がバランスすれば, 斜面から落ちずに, 回り続ける

重力を「気圧差」とみれば,
「低気圧」「高気圧」に相当.

正確には「圧力傾度力」
このような風を「地衡風」



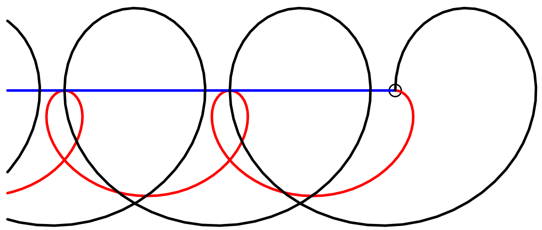
速度 V とすると,
コリオリ力 $F_C = fmV = F_G \rightarrow V = \frac{F_G}{fm}$

初速をつけた場合…

$$u = V\sin(ft+\theta) - \frac{gs}{f}$$

$$v = V\cos(ft+\theta)$$

初速によらず, 1 慣性周期で
$\frac{2\pi gs}{f^2}$ 移動.
(同じ場所を通る)



いろいろな初速での軌跡

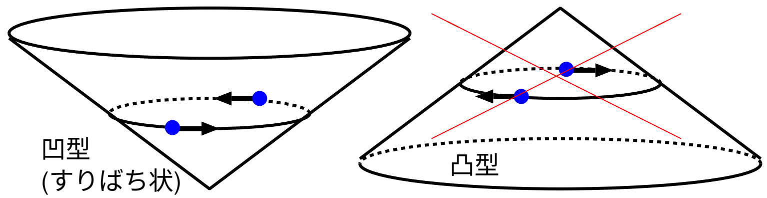
初速を $u = -\frac{gs}{f}$, $v = 0$ とすると, 等速直線運動 (青い軌跡)
…コリオリ力と斜面下向きの重力がバランス

もとの運動方程式で $du/dt = dv/dt = 0$ とおいてもよい.

$$m\cancel{\frac{du}{dt}} - fmv = 0, \quad m\cancel{\frac{dv}{dt}} + fmu = -mgs$$

g = 9.8, f = 8×10^{-5}, s = 10^{-3} (= 1mm/1m = 1m/1km) とすると,
u = 120 m s^{-1} (時速 440km), 1 慣性周期での移動距離は 1 万 km
※ 傾斜をもっと小さくしないと, 速すぎる

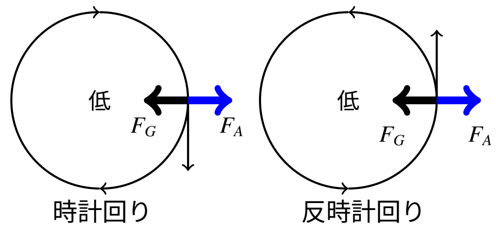
コリオリ力がない場合



遠心力 F_A と重力 F_G がバランスすれば, 斜面から落ちずに, 回り続ける

すりばち状のみ (ルーレット)
回転の向きはどちらでもよい

このような風を「旋衡風」
普通にいう「渦」



速度 V, 半径 R とすると,
遠心力 $F_A = \frac{mV^2}{R} = F_G \rightarrow V = \sqrt{\frac{F_G R}{m}}$

実際には, コリオリ力・遠心力・重力の 3 つのバランス

fujio@aori.u-tokyo.ac.jp